O que vimos até o momento?

Nos estudos fundamentais de ondas eletromagnéticas vimos que:

1) Radiação eletromagnética possui característica ondulatória.

$$E = E_0 \operatorname{sen}(kx \pm \omega t + \phi)$$

$$B = B_0 \operatorname{sen}(kx \pm \omega t + \phi)$$

2) A onda eletromagnética viaja com velocidade $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$

Lembrando ainda que $c = \dfrac{E}{B} = \dfrac{\omega}{k}$.

3) A onda eletromagnética carrega energia:

Densidade volumétrica de energia é $u = \epsilon_0 E_{rms}^2$

ou em função de $B_{rms} \rightarrow u = \epsilon_0 c^2 B_{rms}^2$

"com $E_{rms} = \dfrac{E_{máx}}{\sqrt{2}}$ e $B_{rms} = \dfrac{B_{máx}}{\sqrt{2}}$"

4) O fluxo de energia é dado, em módulo, por:

$\left(\begin{array}{l}\text{densidade volumétrica}\\ \text{de energia}\end{array}\right) \times (\text{velocidade da onda})$

ou seja,

$$\underbrace{\text{Fluxo de energia}}_{} = c\,\epsilon_0 E_{rms}^2$$

$$I = c\,\epsilon_0 E_{rms}^2 \cdot \frac{c}{c} = \frac{c^2 \epsilon_0 E_{rms}^2}{c} = \frac{\cancel{\epsilon_0} E_{rms}^2}{\mu_0 \cancel{\epsilon_0}\, c}$$

$I = \dfrac{E_{rms}^2}{\mu_0 c}$, esta forma é alternativa para

Sendo $I = \dfrac{\text{Energia}}{\text{Área} \times \text{tempo}}$.

Vetorialmente $I = |\langle \vec{S} \rangle| = \dfrac{1}{\mu_0} |\vec{E}_{rms} \times \vec{B}_{rms}|$

que é a média do módulo do vetor pointing $\vec{S}$.

Obs: $\vec{S} = \dfrac{1}{\mu_0} \vec{E}_{máx} \times \vec{B}_{máx}$.

Pressão: "absorção" $P = \dfrac{F}{A} = \dfrac{I}{c}$

ou "reflexão" $P = 2I/c$

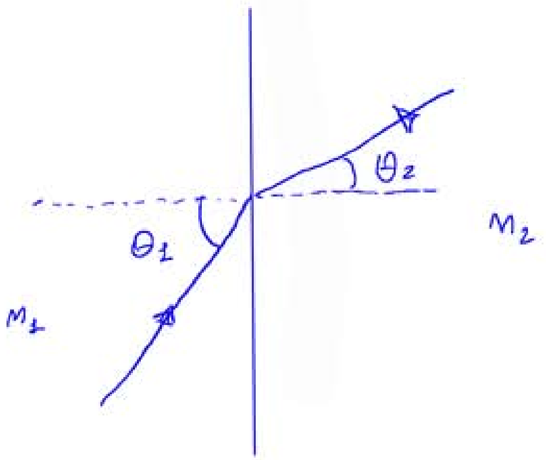
5) Verificou-se experimeltalmente (Frank Hertz) que

Luz = ondas de rádio = ondas eletromagnéticas.

6) Finalmente, entramos nos fenômes de reflexão e refração (ótica).

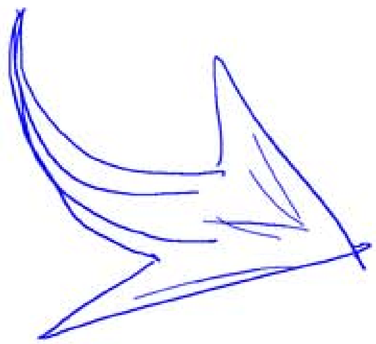
Para reflexão $\Rightarrow$ $\theta_{incidência} = \theta_{reflexão}$

Para refração $\Rightarrow$ $n_1 \operatorname{sen}(\theta_1) = n_2 \operatorname{sen}(\theta_2)$



— // —

Voltemos ao estudo da ótica geométrica.



segue:

Espelhos e lentes:

Introdução

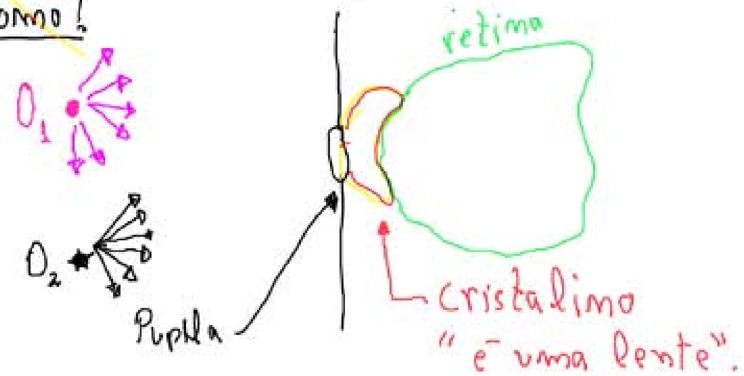
Vamos descrever fisicamente a experiência ótica mais comum; a reflexão em um espelho plano.

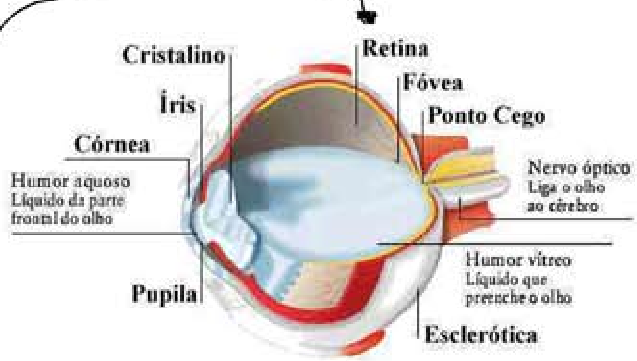
Para começar seria interessante associarmos este fenômeno com nossa experiência diária da visão de objetos através do seu reflexo em um espelho plano.

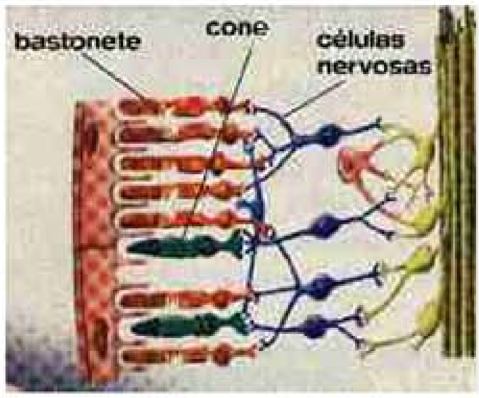
Entendendo (superficialmente) o aparelho humano para detecção de luz.

A imagem se forma na retina

~~como~~?



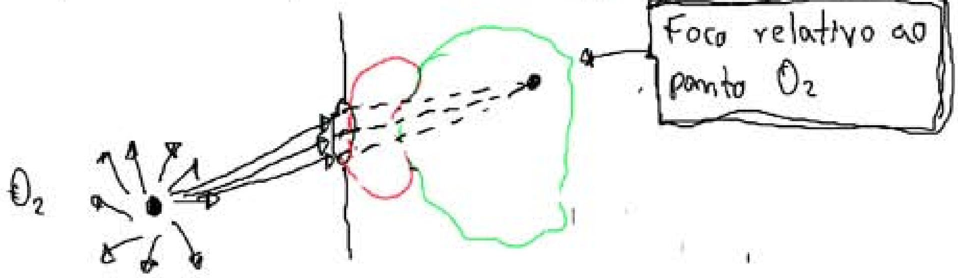




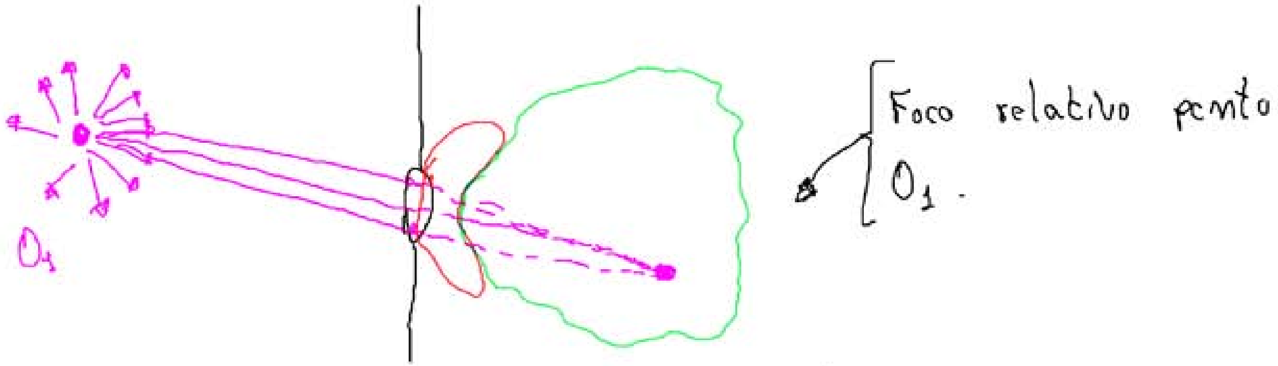
Figs: 9.a e 9.b

Parte dos feixes de luz, provenientes de um ponto externo, atravessam a pupila e alcançam o cristalino. O cristalino é uma lente que direciona os diferentes raios (de um mesmo ponto) para um ponto único (o foco relativo ao ponto considerado).

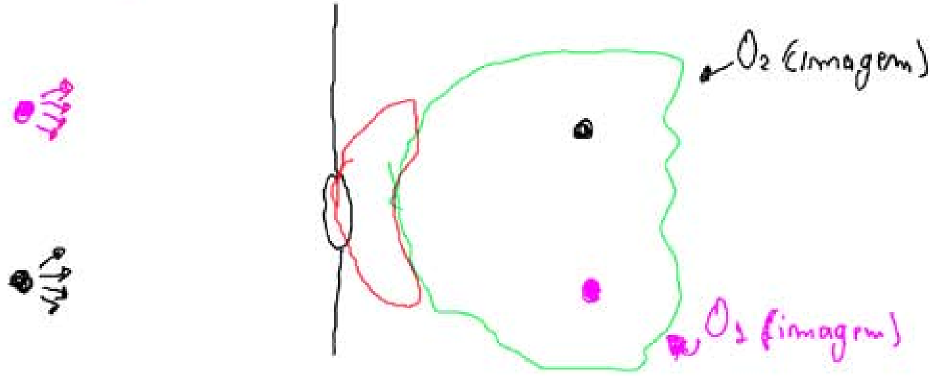
tipo assim →



O mesmo ocorre para o ponto O_1.

⇒ 

Para os dois pontos simultaneamente:



⇒ Ou seja, a imagem se forma na retina invertida relativamente à disposição espacial dos pontos externos.

Se expandirmos este processo para um corpo inteiro (composto por infinitos pontos), cada ponto do corpo externo terá sua imagem projetada na retina e, consequentemente a imagem completa será formada na retina de forma invertida.

—//—

Na Fig. 9b estão representados os receptores fotosensíveis acoplados à retina. Estes são estimulados pelo campo elétrico oscilante associados ao feixe incidente e, através de um pulso eletroquímico, esta informação é levada ao cérebro.

O cérebro, por sua vez, se encarrega de associar os sentidos e juntá-los de forma "coerente". Como o tato mostra que O_1 está por cima, então o cérebro inverte a imagem luminosa "Esta inversão deve ser mais simples que inverter o sentido do tato ao contrário"

Entendido como enxergamos, vamos estudar estudar imagens provenientes de reflexo.

⇒ Espelho → A intensidade da luz incidente é totalmente refletida.

Define-se como imagem real aquela resultante do reflexo direto da luz (Ex: qualquer objeto real); e imagem virtual ocorre quando enxergamos um objeto em uma região onde os raios não o atravessam, como no exemplo da figura 10.

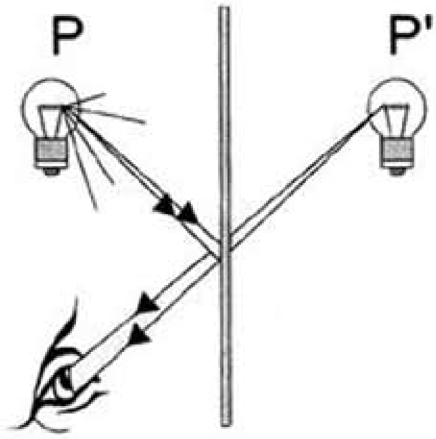


Fig. 10

Análise: A imagem P é real pois sua imagem se forma em nossa retina com raios que vêm realmente do objeto para o qual estamos olhando.

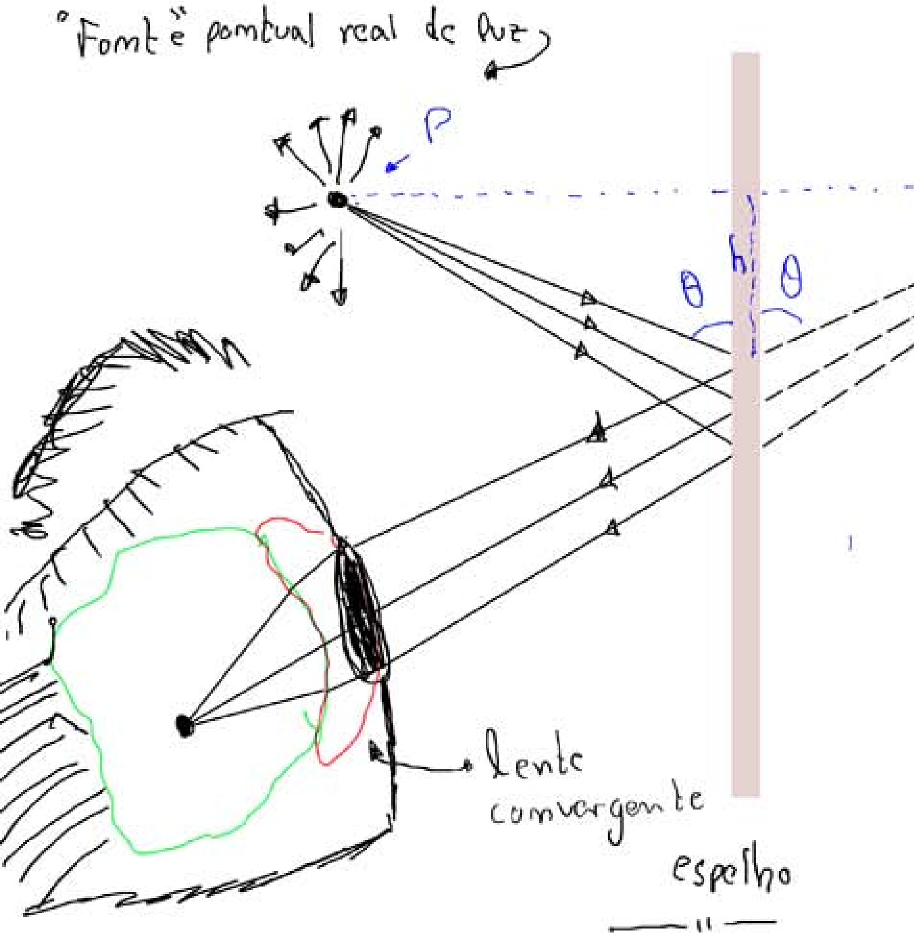
A imagem P' é virtual pois a enxergamos através de raios provenientes de outro local (do espelho) e não do ponto P' onde o objeto é percebido.

Para um espelho plano a distância da imagem (i) é convencionada negativa, enquanto que a distância do objeto (p) é positiva. Pode-se mostrar (prolongando os raios e refletindo-os no espelho) que $\boxed{i = -p}$.

Exercício:

Verificar esta relação.

"bastante simples".



⇒ $tag(\theta) = \frac{i}{h} = \frac{p}{h}$

⇒ $|i| = |p|$

define-se que i é negativo (para servir como sinônimo de virtual) e p como positivo (objeto real).

Logo: $\boxed{i = -p}$

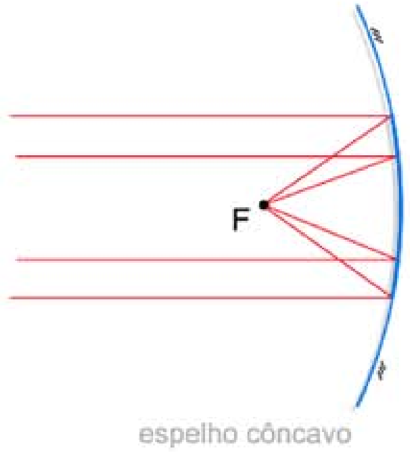
ESPELHOS ESFÉRICOS:

O procedimento para espelhos esféricos é similar ao plano. Basicamente temos que traçar retas a partir de um ponto que compõe a imagem, considerar que ao atingir o espelho o raio reflete com mesma angulação, relativamente à normal do espelho no ponto considerado, e projetar o ponto onde ocorre a imagem aparente.

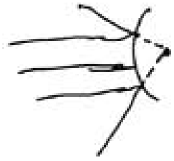
Espelhos curvos definem um ponto focal. Os raios de luz provenientes de objetos "muito" distantes de um aparelho ótico qualquer, chegam até este aparelho (espelhos, lentes, ...) aproximadamente paralelos. Retas paralelas chegando em um espelho definem um ponto focal que corresponde a um ponto para onde todos os raios convertem. ⇒ Então, para encontrarmos o ponto focal, colocamos o objeto infinitamente longe do espelho ⇒

e então buscamos o ponto onde todos os raios se encontram.

Ex:



Para um espelho convexo o ponto focal ocorre do outro lado do espelho. Neste caso o ponto focal é dito virtual.

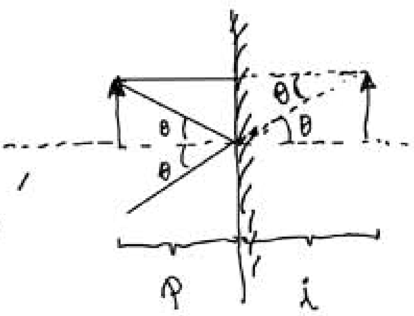


(Espelho curvo Fig. 1) - Côncavo.

Vamos acompanhar a posição da imagem como função da posição do objeto:

Espelho plano:

centro e foco no infinito



⇒ Neste caso, como se pode observar na figura, $\operatorname{tg}(\theta) = \frac{h_o}{i} = \frac{h_i}{i} = \frac{h_o}{p} = \frac{h_i}{p}$

Conclusão: $h_o = h_i$ "Mesma altura"

e $i = p$ "Mesma distância relativa ao espelho"

⇒ É comum colocar a referência no espelho e considerar o lado da imagem como negativo

⇒ $\boxed{p = -i}$

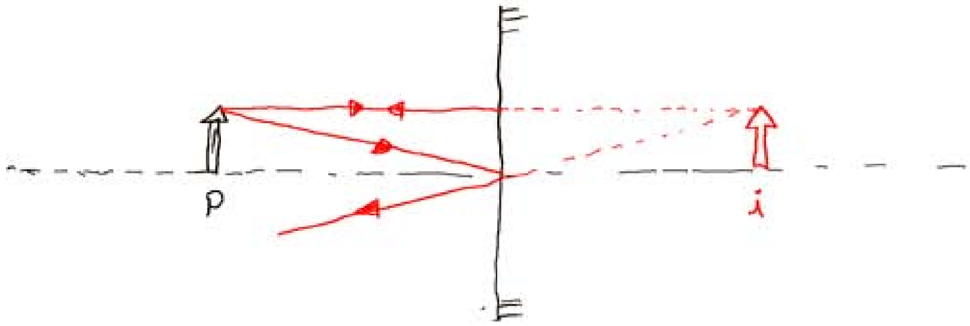
=|||

continuar curvando o espelho e analizando o que acontece com a imagem.

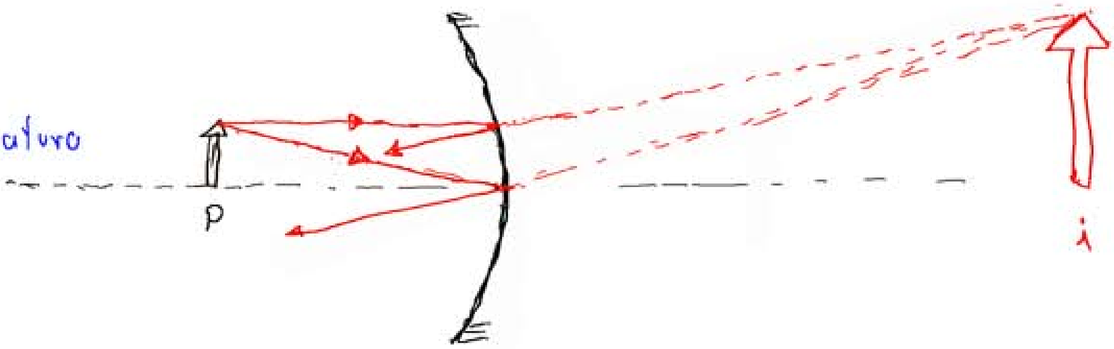
Vamos curvar o espelho e traçar dois raios de luz (pelo menos) a fim de acompanharmos a posição e tamanho da imagem.

Obs: Para uma dinâmica próxima à correta é preciso utilizarmos uma geometria próxima à real (reflexo com mesmo ângulo).

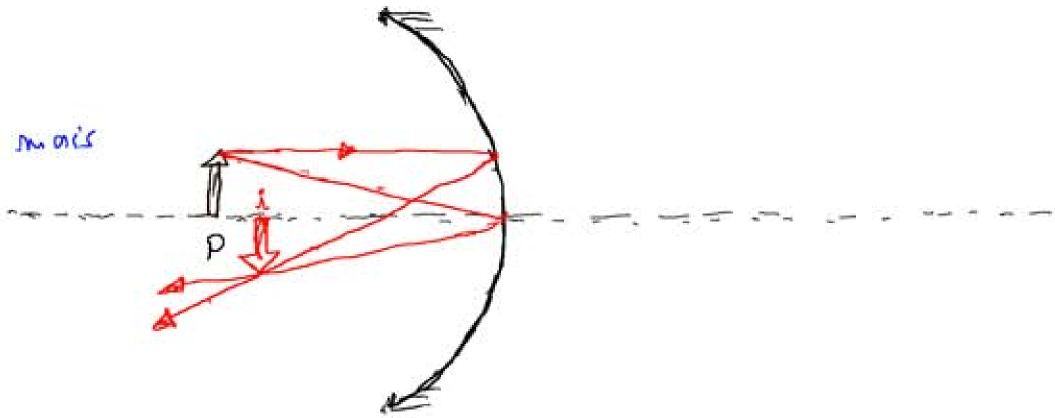
1) Curvatura zero
"espelho plano"



2) Aumentando a curvatura
"espelho côncavo"



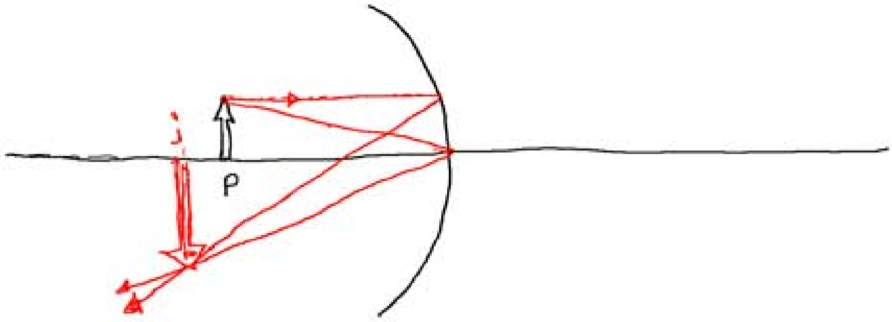
3) Aumentando ainda mais a curvatura.

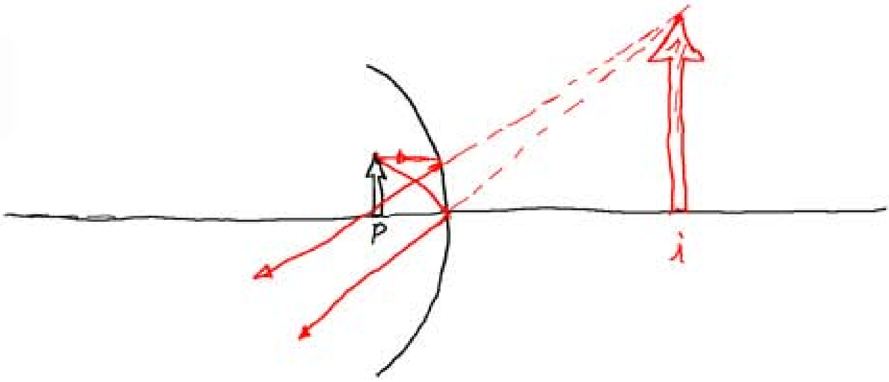


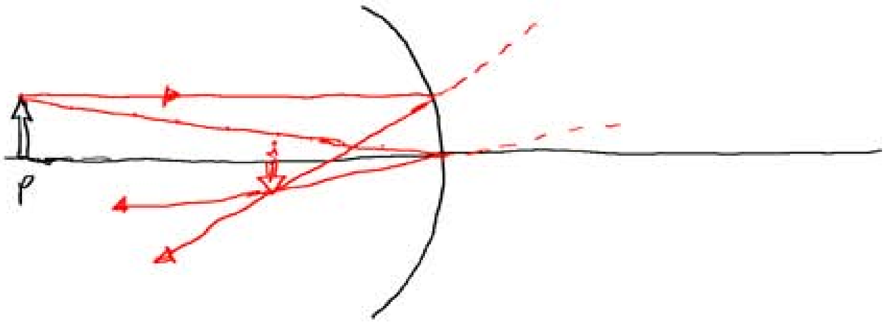
Observem que a posição da imagem, e também seu sentido e sua ampliação (tamanho), dependem do raio de curvatura do espelho, logo $i \rightarrow i(r)$.

Adicionalmente, se mantivermos a curvatura fixa e trocarmos a posição do objeto (p), acontece que

"Curvatura fixa"







→ A posição, tamanho e sentido da imagem depende da posição do objeto p.

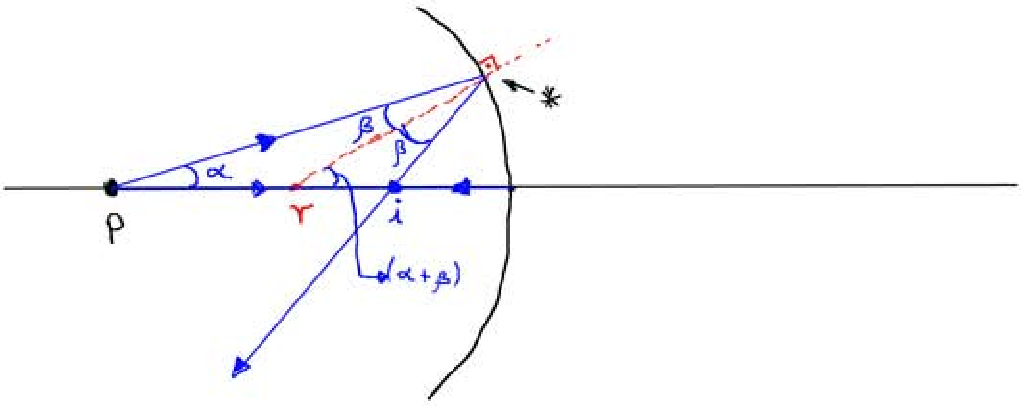
Dos fatos ilustrados acima, concluímos que as variáveis

p, i e r, estão correlacionadas.

→ Quando variáveis estão fisicamente correlacionadas, então é provável (mas não certo) que possamos correlacioná-las através de uma equação matemática. Uma expressão matemática seria de grande utilidade, pois nos daria a condição de prever resultados antes de construir dispositivos óticos, economizando tempo, suor e, principalmente, dinheiro.

Vamos agora buscar esta possível relação matemática entre r, p e i.

Vamos utilizar, por simplicidade, um objeto pontual.

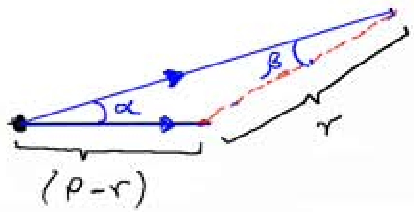


Queremos correlacionar as variáveis que aparecem na figura acima.

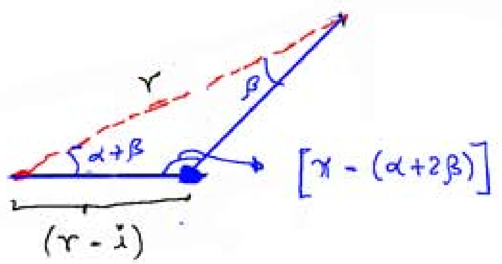
Uma forma mais imediata de obtermos alguma correlação é utilizarmos a geometria associada aos triângulos que se formaram.

Temos dois triângulos:

- triângulo $\overline{p*r}$

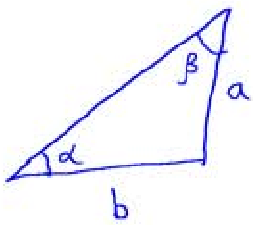


- triângulo $\overline{r*i}$



Vamos então utilizar a lei dos senos para montarmos duas equações

"Lembrando a lei dos senos



$$\Rightarrow \frac{a}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{b}{\text{sen}(\beta)}$$ "

Do triângulo $\overline{P*r}$

$$\frac{P-r}{\mathrm{sen}(\beta)} = \frac{r}{\mathrm{sen}(\alpha)} \qquad (1)$$

Do triângulo $\overline{r*i}$

$$\frac{r-i}{\mathrm{sen}(\beta)} = \frac{r}{\mathrm{sen}[\pi-(\alpha+2\beta)]}$$

Obs: $\mathrm{sen}[\pi-(\alpha+2\beta)] =$

$\Rightarrow \underbrace{\cancel{\mathrm{sen}(\pi)}}_{\text{zero}}\cos(\alpha+2\beta) - \mathrm{sen}(\alpha+2\beta)\underbrace{\cos(\pi)}_{(-1)}$

$\Rightarrow \mathrm{sen}[\pi-(\alpha+2\beta)] = \mathrm{sen}(\alpha+2\beta)$

$$\Rightarrow \frac{r-i}{\mathrm{sen}(\beta)} = \frac{r}{\mathrm{sen}(\alpha+2\beta)} \qquad (2)$$

$\Rightarrow$ Considerando o caso habitual (ângulos pequenos), podemos usar a aproximação

$$\mathrm{sen}(\theta) \approx \theta .$$

Podemos reescrever as equações (1) e (2) como:

$$(1) \qquad \frac{P-r}{\beta} \simeq \frac{r}{\alpha}$$

$$(2) \qquad \frac{r-i}{\beta} \simeq \frac{r}{\alpha+2\beta}$$

Como queremos uma correlação entre r, i e P, vamos isolar α e β em uma das equações e substituir na outra.

de (1) $\Rightarrow \beta/\alpha = \dfrac{P-r}{r}$

de (2) $\Rightarrow \dfrac{r-i}{r} = \dfrac{\beta/\alpha}{1+2\beta/\alpha}$ ↘

(1) em (2)

$$\Rightarrow \frac{r-i}{r} = \frac{(p-r)/r}{1+2\cdot\frac{(p-r)}{r}}$$

$$= \frac{p-r}{r+2p-2r}$$

$$\Rightarrow \frac{r-i}{r} = \frac{p-r}{2p-r}$$ "multiplicando em X"

$$2pr - \cancel{r^2} - 2pi + ir = rp - \cancel{r^2}$$

$$\Rightarrow pr - 2pi + ir = 0$$

Obs: "Já é uma relação entre r, p e i."

simplificando $(\div\, ipr)$

$$\frac{1}{i} - \frac{2}{r} + \frac{1}{p} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{i} = \frac{2}{r}}$$

Obs: É comum livros utilizarem p' no lugar de i.

Significa: Sabendo o raio de curvatura e a posição do objeto sabemos onde estará a imagem (importante saber isto antes de construir um equipamento ótico).

FOCO:

Vimos que existe um ponto focal. Masss onde ele se localiza?

⇒ Vamos colocar p no infinito, pois a imagem de um objeto no infinito ocorre no foco.

$$\Rightarrow \begin{array}{l} p = \infty \\ i = f \end{array} \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{\infty}}_{zero} + \frac{1}{f} = \frac{2}{r} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{r/2} \Rightarrow \boxed{f = r/2}$$

O foco está na metade do raio.

Usando o foco f, podemos reescrever a equação dos espelhos esféricos na forma tradicional:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f}$$

//.

Observe que o espelho plano é um caso particular do espelho esférico. Espelho plano equivale a um esférico com raio de curvatura infinito, ou seja:

$f = \frac{r}{2}$ $\quad r \to \infty \quad \Rightarrow \quad f \to \infty$

então: $\frac{1}{p} + \frac{1}{i} = \underbrace{\frac{1}{\infty}}_{\text{zero}} \Rightarrow \frac{1}{p} = -\frac{1}{i} \Rightarrow \boxed{i = -p}$

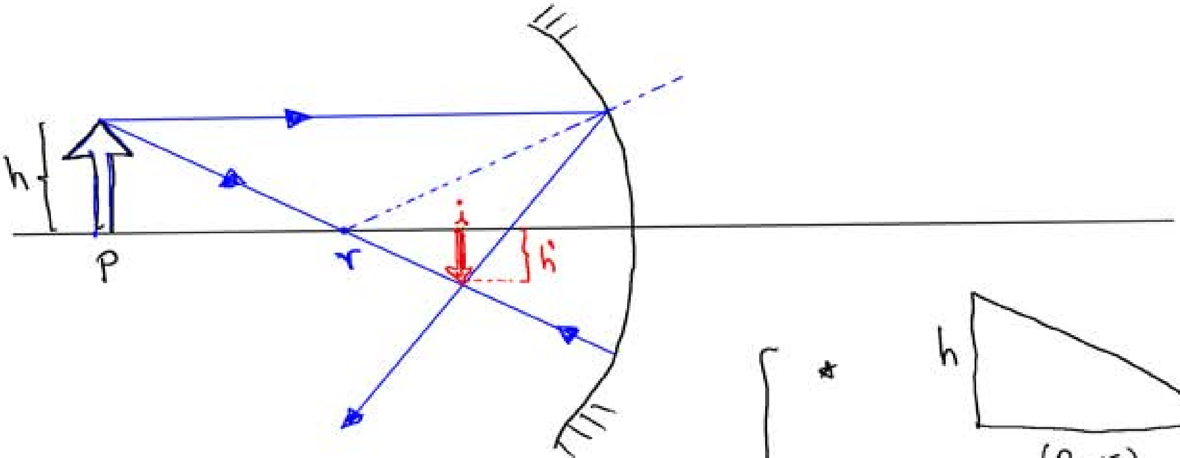
Espelho plano.

"Serve como exercício"

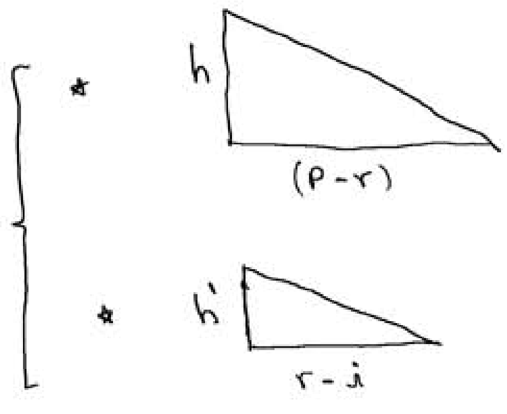
//

Ampliação: Calculamos, acima, uma relação entre distâncias relativamente ao vértice. Vamos agora determinar o tamanho da imagem.

Geometricamente:



Esta figura define dois triângulos semelhantes:



Define-se ampliação como $m \equiv \frac{h'}{h}$ (em módulo).

A fim de considerarmos também o sentido, vamos introduzir o sinal negativo (cabeça para baixo neste caso).

$$m = -\frac{h'}{h}$$

mas $\frac{h'}{h} = \frac{r-i}{p-r}$

$$m = -\frac{r-i}{p-r} = -\frac{i}{p} \cdot \frac{\left(\frac{r}{i} - 1\right)}{\left(1 - \frac{r}{p}\right)}$$

masss... $\frac{1}{p} + \frac{1}{i} = \frac{2}{r} \Rightarrow \frac{r}{i} = 2 - \frac{r}{p}$

$$m = -\frac{i}{p} \cdot \frac{\left(2 - \frac{r}{p} - 1\right)}{\left(1 - \frac{r}{p}\right)} = -\frac{i}{p} \cdot \frac{\cancel{(1 - r/p)}}{\cancel{(1 - r/p)}}$$

$$\boxed{m = -\frac{i}{p}}$$

Obs: Como $p > 0$ sempre, então a imagem será de cabeça para baixo se $i > 0$, ou seja, imagem do lado de "fora" do espelho (imagem real); e será de cabeça para cima se $i < 0$ ("dentro" do espelho, imagem virtual).

Exercício (Analisar as equações obtidas para espelhos). 87

"Solução":

Vamos isolar a variável dependente i.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f} \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{i} = \frac{2}{r}$$

distância i.

$$\Rightarrow i = \frac{1}{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{f}\right)} \qquad \text{ou} \qquad i = \frac{1}{\left(\frac{1}{p} - \frac{2}{r}\right)} \qquad (1)$$

Ampliação $$m = -\frac{i}{p}. \qquad (2)$$

—"—

de (1) fica óbvio que o sinal de i depende da relação entre $\frac{1}{p}$ e $\frac{1}{f}$; $i > 0$ (real, fora do espelho) se $\frac{1}{p} > \frac{1}{f}$, ou seja, $p < f$. Adicionalmente se $i > 0$, então $m < 0$ e a imagem ocorre invertida.

Resumindo $p < f$. Se o objeto é colocado entre o foco e o vértice, a imagem é real e invertida.

Analogamente se $p > f \rightarrow i < 0$ e $m > 0$.

$\Rightarrow$ imagem virtual e de cabeça para cima.

Observe também que $|m| > 1$ se $|i| > p$.

continua:

Podemos também variar as variáveis independentes (p e r) para infinito e zero (extremos) e ver o que ocorre com i.

$$i = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{p}} \quad ; \quad \text{se} \quad p \to \infty \quad \Rightarrow \quad i = \frac{1}{\frac{1}{f} - \text{zero}}$$

$$\Rightarrow \underline{i = f}$$

Como esperado; um objeto no infinito tem sua imagem projetada no foco.

Adicionalmente, $m = -\frac{i}{\infty} \Rightarrow m \cong \text{zero}$.

ou seja, o objeto tem seu tamanho reduzido a um ponto, que é o foco. //

Se p = zero?

$$\Rightarrow i = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{\text{zero}}} \Big\} \text{indeterminado} \quad \Rightarrow \underbrace{i = \text{indeterminado}}$$

Lógico, pois zero está dentro ou fora do espelho?

"Não é um ponto de onde os raios podem "viajar" até encontrar o espelho, afinal, $p=0$ é o próprio espelho". //

Exercício: Analisar matematicamente e geometricamente o que acontece com a imagem se $\underline{p}$ é colocado no foco ($p=f$).

Maneiro né!

etc...

Estas conclusões podem ser verificadas geometricamente.

Deixo como exercício.

Boms Estudos //

Questão:

Convencionamos que uma imagem com sinal negativo deve estar no lado de "dentro" do espelho, ou seja, deve ser virtual.

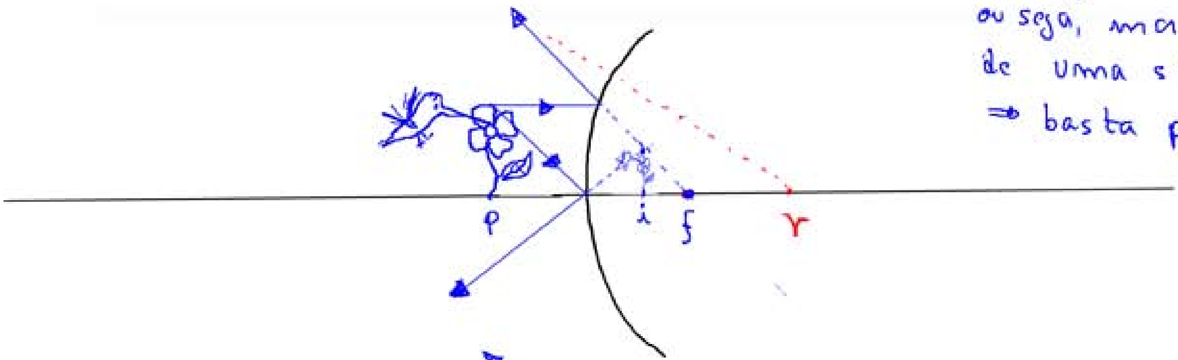
Verificamos matematica e geometricamente que isto ocorre através das equações obtidas através de uma geometria associada com um espelho côncavo.

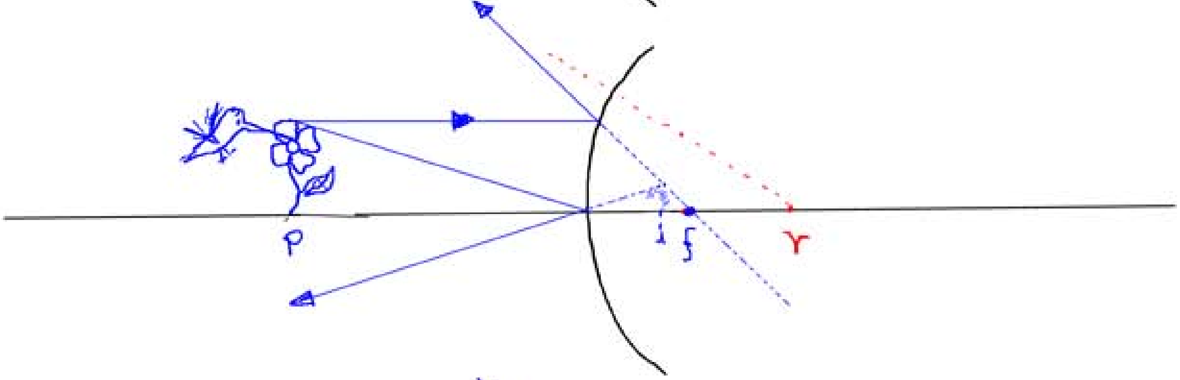
⇨ Será que os sinais corretos são obtidos também para um espelho convexo?

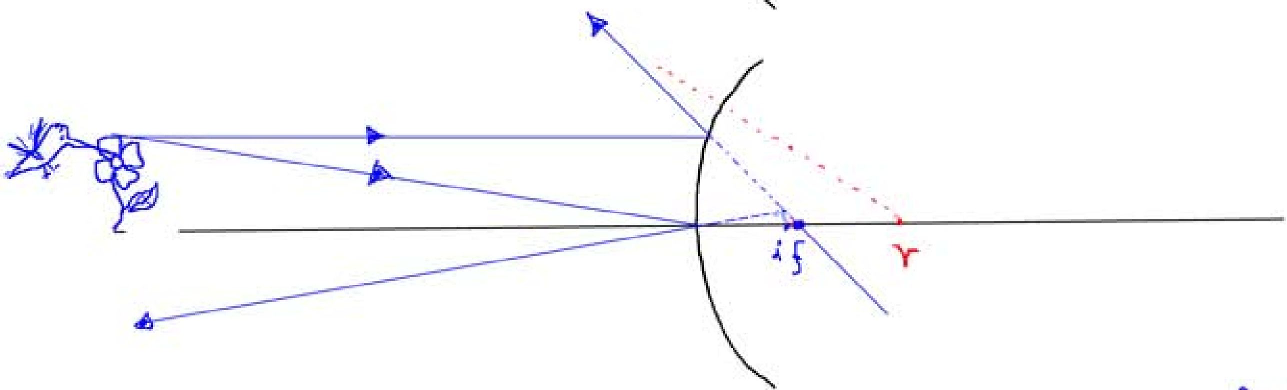
Vamos fazer uma análise geométrica do espelho convexo e comparar com a equação $\frac{1}{p} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f}$.

Fixando r (ou f) e posicionando p em diferentes pontos:

"embora o objeto esteja mais complicado, ou seja, mais próximo de uma situação real ⇒ basta projetarmos um ponto".







Análise

M

Análise:

Como esperado; a medida que o objeto vai para o infinito, a imagem tende ao ponto focal.

Adicionalmente, observe que independentemente de onde está o objeto, a imagem é sempre virtual e "presá entre o vértice do espelho e o ponto focal" Além de ser sempre menor que p".

* Mas será que matematicamente temos $i<0$ sempre?

$$\Rightarrow \frac{1}{p}+\frac{1}{i}=\frac{1}{f} \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{i}=\frac{2}{r}$$

$$\Rightarrow i=\frac{1}{\frac{1}{f}-\frac{1}{p}} \qquad \text{ou} \qquad i=\frac{1}{\frac{2}{r}-\frac{1}{p}}$$

$\Rightarrow$ Putz .... i pode ser positivo ou negativo dependendo da relação entre $\frac{1}{f}$ e $\frac{1}{p}$.

Como resolver esta inconsistência?

Resposta: Definindo (convencionando) que um espelho convexo possui raio negativo.

Desta forma, para um espelho convexo, $r<0$ e $f<0$.

$$\Rightarrow i=\frac{1}{\frac{1}{f}-\frac{1}{p}}$$

; como $p>0$ sempre, então $i<0$ sempre (para convexo).

Resumindo: Côncavo $r>0$ (equivale a $f>0$)

Convexo $r<0$ (" " $f<0$).

Convenção de sinais. $\left\{\begin{array}{l}\text{observe que } m=-\frac{i}{p}\text{, como } i<0 \Rightarrow \\ m>0 \text{ sempre.} \Rightarrow \text{Sempre de cabeça pra cima.}\end{array}\right.$